Научная статья
УДК 517.946
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-5-21

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Гузел Рашитхужакызы Ашурова[1]
Александр Иванович Кожанов[2]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби
Алматы, Казахстан,
[2]Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия,
[1,2] Институт математики и математического моделирования
Алматы, Казахстан

[1]ashurova.guzel@gmail.com;https://orcid.org/0000-0001-5053-4981
[2]kozhanov@math.nsc.ru;https://orcid.org/0000-0003-4376-4003

Аннотация

Работа посвящена исследованию разрешимости в анизотропных пространствах Соболева новых нелинейных обратных коэффициентных задач для дифференциальных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. Особенностью изучаемых задач является то, что исходное дифференциальное уравнение может вырождаться в тех или иных точках области определения. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений - решений, имеющих все обобщенные по Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова и фразы

дифференциальные уравнения с кратными характеристиками, вырождение, неизвестный коэффициент, регулярные решения, существование, единственность.

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта AP26199323 «Исследование обратных задач для неклассических дифференциальных уравнений»

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 5-21
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 5-21

Для цитирования

Ашурова Г. Р., Кожанов А. И. Коэффициентные обратные задачи для вырождающегося дифференциального уравнения с кратными характеристиками // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 5-21. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-5-21

Coefficient inverse problems for a degenerate differential equation with multiple characteristics

Guzel R. Ashurova[1], **Alexander I. Kozhanov**[2],

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

[2]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

[1,2] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

[1]ashurova.guzel@gmail.com;https://orcid.org/0000-0001-5053-4981
[2]kozhanov@math.nsc.ru;https://orcid.org/0000-0003-4376-4003

Abstract

The paper is devoted to the investigation of solvability of new nonlinear inverse coefficient problems for third-order differential equations with multiple characteristics in anisotropic Sobolev spaces. The considered equations may degenerate at some points of the domain. Existence and uniqueness theorems for regular solutions are proved. The method is based on reduction of inverse problems to auxiliary direct problems together with regularization and a priori estimates.

Keywords

multiple characteristic differential equations, degeneration, unknown coefficient, regular solutions, existence, uniqueness.

Funding

The work was supported by the project AP26199323 “Investigation of inverse problems for nonclassical differential equations”

For citation

Ashurova G.R., Kozhanov A.I., Coefficient inverse problems for a degenerate differential equation with multiple characteristics // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 5-21. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-5-21

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 5-21
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 5-21

§ 1. Введение и предварительные сведения

Дифференциальные уравнения третьего порядка играют важную роль в математическом моделировании различных физических и инженерных систем. Одним из сложных случаев являются вырожденные дифференциальные уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, которые возникают в ситуациях, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. Такие уравнения часто появляются в задачах, связанных с устойчивостью систем, вибрациями, искажением сигналов, и в других приложениях, где кратные корни могут указывать на особые физические или математические явления.

Коэффициентная обратная задача, изучаемая в данной статье, является нелинейной и направлена на восстановление коэффициентов вырожденного дифференциального уравнения на основе известных внешних данных. Эта задача представляет собой значительный интерес из-за своей математической сложности и практической значимости. Вырожденные уравнения третьего порядка с кратными характеристиками отличаются от обычных уравнений более сложной структурой решений, что требует разработки специальных методов для эффективного решения как прямой, так и обратной задачи.

Изучение коэффициентной обратной задачи включает в себя решение ряда связанных проблем, таких как определение условий существования и единственности решения. В условиях кратных характеристик и вырождения, эти задачи становятся особенно трудными, поскольку стандартные методы решения могут не применяться или требовать значительной модификации.

Близкие по постановке обратные задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений третьего порядка, но в линейной постановке (т.е. обратные задачи с неизвестным внешним воздействием) изучались в работе [1], и там же была представлена библиография работ, посвященных обратным задачам в целом и обратным задачам для вырождающихся неклассических уравнений в частности. Представленные ниже задачи, как уже говорилось, являются нелинейными, и ранее каких-либо результатов о существований решений этих задач получено не было.

Все построяния и рассуждения в работе будут основаны на свойствах функций из пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения и свойства функции из этих пространств можно найти в монографиях [2]-[4].

Целью предлагаемой читателю работы является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых обратных задач - то есть решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее дифференциальное уравнение.

В обратных задачах, как правило, помимо краевой информации, характерной для соответствующих дифференциальных уравнений, должна задаваться некоторая дополнительная информация - именно, должны задаваться условия переопределения. В настоящей работе в качестве условий переопределения используются либо условия интегрального переопределения, либо же условия точечного переопределения.

Изучаемые задачи имеют модельный вид. О переносе полученных ниже результатов на другие задачи, а также о возможных обобщениях будет сказано в конце работы.

§ 2. Постановка задач.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$. Далее пусть $\varphi(t), f(x,t), N(x), \mu(t)$ есть заданные функции, определенные при $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$, x_0 есть заданная точка из интервала $(0,1)$.

*Обратная задача 1:*найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t-\varphi(t)u_{xxx}+q(t)u=f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,t)=u_x(0,t)=0,\ t\in(0,T), \tag{3}$$

$$u(1,t)=0,\ t\in(0,T), \tag{4}$$

а также условия переопределения

$$\int_\Omega N(x)u(x,t)dx=\mu(t), t\in(0,T). \tag{5}$$

Обратная задача 2: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2)-(4) и условия:

$$u(x_0,t)=\mu(t),\ t\in(0,T),\ 0<x_0<1. \tag{6}$$

Обратная задача 3: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2)-(3),(5) и условия:

$$u_{xx}(1,t) = 0, \ t \in (0,T). \tag{7}$$

Обратная задача 4: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x,t)$ условий (2)-(3), (6) и (7).

Обозначим через V множество функций $v(x,t)$, $q(t)$ таких, что $v(x,t) \in W_2^{3,1}(Q)$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Уточним, что целью работы будет доказательство существования и единственности в множестве V решений обратных задач 1–4.

§ 3. Разрешимость обратных задач 1 и 3.

Доказательство разрешимости обратных задач 1 и 3 будет проведено с помощью перехода от обратной задачи к вспомогательной, но уже прямой, задаче для вырождающегося интегро - дифференциального уравнения третьего порядка, доказательстве ее разрешимости в пространстве $W_2^{3,1}(Q)$, и далее - в построении по решению вспомогательной задачи решения исходной обратной задачи.

Покажем прежде всего, как определяются необходимые вспомогательные задачи. Определим функцию $f_0(t)$:

$$f_0(t) = \int_\Omega N(x) f(x,t)dx,$$

положим

$$\varphi_0 = \max_{[0,T]} \varphi(t),$$

$$M_0 = vrai \min_{[0,T]} [f_0(t) - \mu'(t)],$$

$$M_1 = T(\int_Q f^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} + [T^2 \int_Q f^2 dxdt + T \int_\Omega u_0^2(x)dx]^{\frac{1}{2}},$$

$$M_2 = T(\int_Q f^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} + [T^2 \int_Q f_{xxx}^2 dxdt + T \int_\Omega u_0'''^2(x)dx]^{\frac{1}{2}},$$

$$M_3 = M_2 ||f_{xxx}||_{L_2(Q)}.$$

Далее, по заданной функции $v(x,t)$ определим функцию $A(t;v)$:

$$A(t;v) = \int_\Omega \varphi(t) N(x) v_{xxx}(x,t)dx.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t - \varphi(t)u_{xxx} + \frac{1}{\mu(t)}[f_0(t) - \mu'(t) + A(t;u)]u = f(x,t) \tag{8}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)-(4).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]),\ \varphi(0) \geq 0,\ \varphi(T) \geq 0,\ \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in (0,T); \tag{9}$$

$$\mu(t) \in C^1([0,T]),\ \mu(t) > \mu_0 > 0 \text{ при } t \in (0,T); \tag{10}$$

$$M_0 > 0,\ \ \varphi_0||N||_{L_2(\Omega)}M_3^{1/2} \leq M_0; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} u_0(x) \in W_2^6(\Omega), \qquad & u_0(0) = u_0'(0) = u_0(1) = 0, \\ & u_0'''(0) = u_0'''(1) = u_0''''(1) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k} \in L_2(Q)$, $k = \overline{0,3}$, $f(0,t) = f(1,t) = f_x(0,t) = 0$ при $t \in ([0,T])$, вспомогательная задача (8), (2)-(4) имеет решение $u(x,t) \in W_2^{3,1}(Q)$.

Для доказательства данной теоремы воспользуемся методом срезок и методом регуляризации.

Пусть M есть положительное число, значение которого мы уточним позже. Определим срезывающую функцию $G_M(\xi)$:

$$G_M(\xi) = \begin{cases} \xi, \ \text{если } |\xi| \leq M, \\ M, \ \text{если } \xi > M, \\ -M, \ \text{если } \xi < -M. \end{cases}$$

Далее пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию, $u(x,t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t - \varphi(t)u_{xxx} + \frac{1}{\mu(t)}[f_0(t) - \mu'(t) + G_{M_0}(A(t;u))]u - \varepsilon u_{xxxxxx} = f(x,t) \tag{13}$$

такую, что для нее выполняются условия (2)-(4), а также условие

$$u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = u_{xxxx}(1,t) = 0,\ t \in (0,T). \tag{14}$$

В краевой задаче (13),(2)-(4), (14) уравнение (13) представляет собой нелинейное параболическое уравнение с липщиц-ограниченной нелинейностью. Используя теорему Шаудера [5] и стандартные энергетические

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 5-21
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 5-21

оценки для параболических уравнений [6]-[7], нетрудно показать, что эта задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{6,1}(Q)$.

Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ решений краевой задачи (13),(2)-(4), (14) имеют место равномерные по ε априорные оценки, которые позволят организовать процедуру предельного перехода.

При получении оценок индекс "ε"опустим.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega\Big(u_\tau-\varphi(\tau)u_{xxx}+\frac{1}{\mu(\tau)}\big[f_0(\tau)-\mu'(\tau)+G_{M_0}(A(\tau;u))\big]u- \\ -\varepsilon u_{xxxxxx}\Big)u\,dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega fu\,dxd\tau. \tag{15}$$

Интегрируя по частям, используя краевые условия (2)-(4), (14), учитывая неотрицательность функций $\varphi(\tau)$ и $f_0(\tau)-\mu'(\tau)+G_{M_0}(A(\tau;u))$, а также применяя неравенство Гельдера, нетрудно получить, что следствием (15) будет неравенство:

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx\le\int_\Omega u_0^2(x)dx+2(\int_Q f^2dxdt)^{\frac12}(\int_Q u^2dxdt)^{\frac12}.$$

Интегрируя это неравенство по переменной t в пределах от 0 до T, получим еще одно неравенство:

$$\int_Q u^2(x,t)dxdt\le T\int_\Omega u_0^2(x)dx+2T(\int_Q f^2dxdt)^{\frac12}(\int_Q u^2dxdt)^{\frac12}.$$

Из этого неравенства следует, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (13),(2)-(4), (14) выполняется априорная оценка

$$\int_Q u^2dxdt\le M_1^2. \tag{16}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_\Omega\Big(u_\tau-\varphi(\tau)u_{xxx}+\frac{1}{\mu(\tau)}\big[f_0(\tau)-\mu'(\tau)+G_{M_0}(A(\tau;u))\big]u_{xxxxxx} \\ -\varepsilon u_{xxxxxx}\Big)u_{xxxxxx}\,dxd\tau=-\int_0^t\int_\Omega fu_{xxxxxx}\,dxd\tau. \tag{17}$$

Вновь используя формулу интегрирования по частям,используя краевые условия (2)-(4), (14), учитывая неотрицательность функций $\varphi(\tau)$ и

$f_0(\tau) - \mu'(\tau) + G_{M_0}(A(\tau; u))$, далее вновь используя неравенство Гельдера и интегрируя по переменной t, получим после анализа квадратного неравенства, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (13),(2)-(4), (14) выполняется априорная оценка

$$\int_Q u_{xxx}^2 dxdt \le M_2. \qquad (18)$$

Вновь рассмотрим равенство (17). Оценка (18) означает, что имеет место третья априорная оценка:

$$\int_\Omega u_{xxx}^2 dxdt + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega u_{xxxxxx}^2 dxd\tau \le M_3. \qquad (19)$$

Из (19) вследствие условий (3) и (4) вытекает еще одна оценка:

$$vrai \max_{\overline{Q}} |u(x,t)| \le M_4. \qquad (20)$$

Постоянная M_4 в этой оценке определяется лишь функциями $f(x,t)$ и $u_0(x)$, а также числом T.

Наконец, последняя оценка

$$\int_Q u_t^2 dxdt \le M_5 \qquad (21)$$

очевидным образом вытекает из оценок (18)- (20); постоянная M_6 в этой оценке вновь определяется функиями $f(x,t)$ и $u_0(x)$, а также числом T.

Полученных оценок уже вполне достаточно для доказательства разрешимости краевой задачи (8),(2)-(4).

Прежде всего заметим, что для решений $u^\varepsilon(x,t)$ краевой задачи (13),(2)-(4),(14) при выполнении условий теоремы имеют место неравенства

$$|A(t; u^\varepsilon)| \le \varphi_0 ||N||_{L_2(\Omega)} M_3^{\frac{1}{2}} \le M_0.$$

Эти неравенства означают, что выполняется равенство

$$G_{M_0}(A(t; u^\varepsilon)) = A(t; u^\varepsilon). \qquad (22)$$

Далее, из оценок (18),(19) и (21), а также из свойтсва рефлексивности гильбертова пространства [5] следует, что существует функция $u(x,t)$ принадлежащая пространству $W_2^{3,1}(Q)$. Последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ положительных чисел и последовательность $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ решений краевой задачи (13),(2)-(4),(14) с $\varepsilon = \varepsilon_m$, такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости

$$\varepsilon_m \to \infty,$$

$$u^{\varepsilon_m}(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_2^{3,1}(Q) \text{ сильно в } L_2(Q), \qquad (23)$$
$$\varepsilon_m u^{\varepsilon_m}_{xxxxxx}(x,t) \to 0 \text{ слабо в } L_2(Q).$$

Из этих сходимостей, а также из равенства (22) следует, что функция $u(x,t)$ и будет искомым решением краевой задачи (8),(2)-(4).

Теорема доказана.

Замечание. Дополнительно ко включению $u(x,t) \in W_2^{3,1}(Q)$ для решения краевой задачи (8),(2)-(4) будет выполняться включение $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega))$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (9)-(12), а также условие*

$$\mu(0) = \int_\Omega N(x)u_0(x)dx. \qquad (24)$$

Тогда обратная задача 1 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$, принадлежащее множеству V.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ есть решение краевой задачи (8),(2)-(4). Положим

$$q(t) = \frac{1}{\mu(t)}[f_0(t) - \mu'(t) + A(t;u)].$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ будут связаны в прямоугольнике Q уравнением (1), и что функции $u(x,t)$ и $q(t)$ образуют пару, принадлежащую множеству V.

Умножим уравнение (1) с построенной функцией $q(t)$ на функцию $N(x)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных преобразований получим равенство

$$\omega'(t) + q(t)\omega(t) = 0, \qquad (25)$$

в котором $\omega(t)$ есть функция

$$\omega(t) = \int_\Omega N(x)u(x,t)dx - \mu(t).$$

Поскольку функция $q(t)$ ограничена и неотрицательна, то вследствие условия (24) из (25) следует $\omega(t) \equiv 0$ в Q. А это означает, что для решения $u(x,t)$ краевой задачи (8),(2)-(4) выполняется условие (5), и далее - что пара $\{u(x,t), q(t)\}$ дает искомое решение обратной задачи 1.

Теорема доказана.

Перейдем к исследованию разрешимости обратной задачи 3.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (9)-(11), а также условия*

$$u_0(x) \in W_2^6(\Omega), \qquad \begin{aligned} &u_0(0) = u_0'(0) = u_0'''(0) = 0, \\ &u_0''(1) = u_0''''(1) = u_0'''''(1) = 0. \end{aligned} \qquad (26)$$

$$\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial x^k} \in L_2(Q), \qquad k = \overline{0,3},$$
$$f(0,t) = f_x(0,t) = f_{xx}(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{27}$$

Тогда краевая задача для уравнения (8) с условиями (2),(3),(7) имеет решение $u(x,t)$ принадлежащее пространству $W_2^{3,1}(Q)$.

Теорема 4.*Пусть выполняются условия (9)-(11), (24), (26) и (27). Тогда обратная задача 3 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$, принадлежащее множеству V.*

Доказательства теорем 3 и 4 проводятся вполне аналогично доказательствам теорем 1 и 2, и отличаются лишь тем, что дополнительными граничными условиями для уравнения (13) будут условия

$$u_{xxx}(0,t) = u_{xxxx}(1,t) = u_{xxxxx}(1,t) = 0, \;\; t \in (0,T).$$

Условия же для функций $f(x,t)$ и $u_0(x)$ определяются именно этими граничными условиями.

§ 4. Разрешимость обратных задач 2 и 4.

Разрешимость обратных задач 2 и 4, как и разрешимость обратных задач 1 и 3, будет установлена с помощью перехода к вспомогательной прямой задаче для нелинейного нагруженного [8]-[9] уравнения. Но если вспомогательное уравнение (13) для обратных задач 1 и 3 является „интегрально-нагруженным“, то для обратных задач 2 и 4 вспомогательное уравнение будет „точечно-нагруженным“.

По заданной функции $v(x,t)$ определим функцию $B(t;v)$:

$$B(t;v) = \varphi(t)v(x_0,t),$$

положим

$$f_1(t) = f(x_0,t) - \mu'(t).$$

Определим необходимые ниже числа $R_0 - R_5$:

$$R_0 = vrai \min_{t\in[0,T]} f_1(t), \;\; R_1 = 2T\Big(\int_Q f^2_{xxxxxx}\, dx\, dt\Big)^{1/2},$$

$$R_2 = T\Big(\int_\Omega u^2_{0xxxxxx}\, dx\Big)^{1/2}, \;\; R_3 = \frac{1}{2}\Big(R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_2}\Big),$$

$$R_4 = \Big(\int_\Omega u^2_{0xxxxxx}\, dx\Big) + 2R_3\Big(\int_Q f^2_{xxxxxx}\, dx\, dt\Big)^{1/2},$$

$$R_5 = \frac{2}{3\pi} R_4^{\frac{1}{2}} \min\Big(x_0^{\frac{1}{2}}, (1-x_0)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Вспомогательной задачей для обратной задачи 2 будет следующая задача: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_t - \varphi(t) v_{xxx} + \frac{1}{\mu(t)}[f_1(t) + B(t;v)] v_{xxx} = f_{xxx}(x,t) \tag{28}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$v(x,0) = u_{0xxx}(x), \ x \in \Omega, \tag{29}$$

а также условия (3) и (4).

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \ \varphi(0) \geq 0, \ \varphi(T) \geq 0, \ \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in (0,T);$$

$$\mu(t) \in C^1([0,T]), \ \mu(t) \geq \mu_0 > 0 \text{ при } t \in [0,T];$$

$$R_0 > 0, \ \varphi_0 R_5 \leq R_0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^6(\Omega))$, $f_{xxx}(0,t) = f_{xxxx}(0,t) = f_{xxx}(1,t) = 0$ при $t \in ([0,T])$, и любой функции $u_0(x)$ из пространства $W_2^6(\Omega)$ такой, что $u_0'''(0) = u_0''''(0) = u_0'''(1) = u_0^{(6)}(0) = u_0^{(7)}(0) = u_0^{(6)}(1) = 0$, вспомогательная задача (28),(29) (3)-(4) имеет решение $v(x,t)$ такое, что $v(x,t) \in W_2^{3,1}(Q)$.

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_t - \varphi(t) v_{xxx} - \varepsilon v_{xxxxxx} + \frac{1}{\mu(t)}[f_1(t) + G_{R_0}(B(t;v))] v_{xxx} = f_{xxx}(x,t) \tag{30}$$

и такую, что для нее выполняются условия (29),(3),(4),(30), а также условие

$$v_{xxx}(0,t) = v_{xxx}(1,t) = v_{xxxx}(1,t) = 0, \ t \in (0,T). \tag{31}$$

Данная краевая задача вновь является начально-краевой задачей для параболического уравнения с липщиц - непрерывной ограниченной нелинейностью, разрешимость ее при фиксированном ε в пространстве $W_2^{6,1}(Q)$

вытекает из общей теории краевых задач для параболических уравнений [6]-[7].

Далее, для решений $v(x,t)$ краевой задачи (29),(3),(4),(30),(31) имеют место неравенства

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v_{xxx}^2(x,t)\,dx+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega u_{xxxxxxx}^2\,dxd\tau\\&\leq\int_\Omega\big[u_0^{(6)}\big]^2\,dx+2\Big(\int_Q f_{xxxxxx}^2\,dxdt\Big)^{\frac12}\Big(\int_Q v_{xxx}^2\,dxdt\Big)^{\frac12}.\end{aligned}\tag{32}$$

Выводятся эти неравенства с помощью равенств вида (17).

Далее, интегрируя (32) по t в пределах от 0 до T, затем решая квадратное неравенство, нетрудно получить оценку

$$\Big(\int_Q v_{xxx}^2dxdt\Big)^{\frac12}\leq R_3.$$

Из этой оценки и вновь из неравенства (32) вытекает вторая априорная оценка

$$\int_\Omega v_{xxx}^2(x,t)dx\leq R_4.$$

Имеет место равенство

$$\int_\Omega v_x^2(x,t)dx=-\frac23\int_\Omega(1-x)v(x,t)v_{xxx}(x,t)dx.$$

Отсюда

$$\int_\Omega v_x^2(x,t)dx\leq\frac{2R_4^{1/2}}{3}\Big(\int_\Omega v^2(x,t)dx\Big)^{\frac12}.$$

Используя далее неравенство

$$\Big(\int_\Omega v^2(x,t)dx\Big)^{\frac12}\leq\frac1\pi\Big(\int_\Omega v_x^2(x,t)dx\Big)^{\frac12},$$

получим, что выполняется оценка

$$\int_\Omega v_x^2(x,t)dx\leq\frac{4R_4}{9\pi^2}.\tag{33}$$

Для завершения доказательства теоремы нужно оценить величину $|v(x_0,t)|$.

Имеют место равенства

$$v(x_0,t)=\int_0^{x_0}v_y(y,t)dy,\ \ v(x_0,t)=-\int_{x_0}^1 v_y(y,t)dy.$$

Из этих равенств и из неравенства (34) следует оценка

$$|v(x_0,t)| \leq \frac{2R_4^{1/2}}{3\pi} \min\Big(x_0^{\frac{1}{2}}, (1-x_0)^{\frac{1}{2}}\Big) = R_5. \tag{34}$$

Все необходимые оценки получены.

Прежде всего заметим, что из оценки (35) и последнего неравенства из условий теоремы следует, что в уравнении (31) выполняется $G_{R_0}(B(t;v)) = B(t;v)$. Далее, из полученных оценок стандартным образом вытекает существование последовательности $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ решений краевой задачи (31),(3),(4),(32) с $\varepsilon = \varepsilon_m$ такой, что предельная функция $v(x,t)$ будет искомым решением краевой задачи (29),(30),(3),(4). Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 6. *Пусть выполняются все условия теоремы 5, и условия*

$$u_0(x_0) = \mu(0);$$

$$f(0,t) = f_x(0,t) = f(1,t) = 0 \textit{ при } t \in [0,T], \; u_0(0) = u_0'(0) = u_0(1) = 0.$$

Тогда обратная задача 2 имеет решение $\{u(x,t), q(t)\} \in V$,$\{u_{xxx}(x,t), q(t)\} \in V$.

Доказательство. По решению $v(x,t)$ краевой задачи (29),(30),(3),(4) определим функцию $u(x,t)$ с помощью равенств

$$u_{xxx}(x,t) = v(x,t), \; (x,t) \in Q,$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \; t \in (0,T).$$

Определим функцию $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{\mu(t)}[f(x_0,t) - \mu'(t) + \varphi(t)u_{xxx}(x_0,t)].$$

Тогда для функции $u(x,t)$ выполняется уравнение

$$u_t - \varphi(t)u_{xxx} + q(t)u = f(x,t).$$

Другими словами, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ связаны в прямоугольнике Q уравнением (1). Для функции $\omega(t) = u(x_0,t) - \mu(t)$ имеет место равенство

$$\omega_t + q(t)\omega = 0, \; t \in (0,T).$$

Из этого равенства и условия $u(x_0,t) = \mu(0)$ следует, что $\omega(t)$ является тождественно нулевой на отрезке $[0,T]$ функция. А это означает, что для функции $u(x,t)$ выполняется условие переопределения (6).

Принадлежность пар $\{u(x,t), q(t)\}$ и $\{u_{xxx}(x,t), q(t)\}$ множеству V очевидна.

Следовательно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ и будут искомым решением обратной задачи 2.

Теорема доказана.

Для обратной задачи 4 имеет место теорема разрешимости, вполне аналогичная теореме 6; ввиду очевидности и повторения формулировок приводить ее не будем. Уточним лишь, что вспомагательной регуляризованной задачей для обратной задачи 4 будет задача нахождения решениия уравнения (30), удовлетворящего условиям

$$v(0,t) = v_x(0,t) = v_{xxx}(0,t) = 0,$$
$$v_{xx}(1,t) = v_{xxxx}(1,t) = v_{xxxxx}(1,t) = 0,\ 0 < t < T.$$

и что для функции $f(x,t)$ и $u_0(x)$ должны выполняться условия

$$f(0,t) = f_x(0,t) = f_{xxx}(0,t) = f_{xxxx}(0,t) = 0,$$
$$f_{xx}(1,t) = f_{xxxxx}(1,t) = 0,\ 0 < t < T.$$

$$u_0(0) = u_0'(0) = u_0''(1) = u_0'''(0) = u_0''(1) = u_0^{(4)}(1) = u_0^{(5)}(1) = 0.$$

Техника доказательства разрешимости обратной задачи 4 вполне соответствует технике доказательства разрешимости задачи 2.

§ 5. Заключение

Полученные в работе результаты о разрешимости нелинейных обратных коэффициентных задач являются новыми. К ним есть несколько замечаний.

1. Вместо уравнений (1) модельного вида можно рассматривать уравнения со всеми младшими членами - именно, уравнения

$$u_t - \varphi(t)u_{xxx} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + q(t)c(x,t)u = f(x,t).$$

Для таких уравнений нетрудно получить результаты о разрешимости обратных задач, аналогичных задачам 1–4, но соответствующие условия будут значительно более громоздкими.

2. Обратные задачи типа задач 1–4 нетрудно изучить и для дифференциальных уравнений с кратными характеристиками произвольного нечетного порядка - именно, для уравнений

$$u_t - \varphi(t)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}} + q(t)u = f(x,t)$$

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 5-21
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 5-21

($m \geq 1$ - целое число). Уточним, что постановку краевых задач для этого уравнения можно найти, например, в статье [9].

3. Для уравнений (1), а также для более общих уравнений, указанных в замечаниях 1 и 2, нетрудно изучить разрешимость обратных коэффициентных задач определения коэфициента $q(t)$ при задании комбинированного условия переопределения - именно, условия вида

$$\alpha \int_{\Omega} N(x)u(x,t)dx + \beta u(x_0,t) = \mu(t),$$

в котором $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Техника доказательства теорем существования остаётся полностью аналогичной рассмотренным выше ситуациям.

Список литературы

1. *Кожанов А.И., Ашурова Г.Р.*Дифференциальные уравнения с кратными характеристиками: вырождение и неизвестное внешнее воздействие//*Челябинский физико-математический журнал.* 2024, 9:4, 585–595

2. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике // *Наука.* М., 1988.

3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа // *Наука.* М., 1973.

4. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces, Differential Operators // *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.* Berlin, 1978.

5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ // *Наука.* М., 1980.

6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // *Наука.* М., 1967.

7. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения // *Наука.* М., 2012.

8. *Дженалиев М.Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений // *Институт теоретической и прикладной математики.* Алматы, 1995.

9. *Кожанов А.И., Лукина Г.А.* Вырождение в дифференциальных уравнениях с кратными характеристиками // *Математические заметки СВФУ.* 2021, т. 28, No. 3, 19–30.

References

1. *Kozhanov,A.I., Ashurova G.R.* Differentsyal'nye Uravneniya s Kratnymi Kharakteristikami: Vyrozhdenie i Neizvestnoe Vneshnee Vozdeystvie //*Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy Zhurnal.* 2024, 9:4, 585–595.

2. *Sobolev S.L.* Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics // *Providence: Amer. Math. Soc.*, 1991.

3. *Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N.* Linear and Quasilinear Elliptic Equations // *Academic.* New York, London, 1968.

4. *Triebel H.* Interpolation Theory. Function Spaces, Differential Operators // *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.* Berlin, 1978.

5. *Trenogin V.A.* Functional Analysis (in Russian)// *Nauka.* Moscow, 1980.

6. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N.* Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type // *Providence: Amer. Math. Soc.*, 1968.

7. *Nakhushev A.M.* Nagruzhennye Uravneniya i ih Primeneniya (in Russian) // *Nauka.* Moscow, 2012.

8. *Dzhenaliev M.T.* K Teorii Lineinykh Kraevykh Zadach dlya Nagruzhennykh Differetsyal'nykh Uravneniy (in Russian) // *Institut Teoreticheskoy i Prikladnoy Matematiki.* Almaty, 1995.

9. *Kozhanov A.I., Lukina G.A.* Vyrozhdeniye v Differentsyal'nykh Uravneniyakh s Kratnymi Kharakteristikami // *Matem. Zametki SVFU.* 2021, T. 28, No. 3, 19–30.

Информация об авторах

Гузел Рашитхужакызы Ашурова, PhD
Scopus Author ID 57428015200
Александр Иванович Кожанов, доктор физико-математических наук, профессор
SPIN 9132-3234 AuthorID: 2099
Scopus Author ID 55892833300

Author Information

Guzel R. Ashurova, PhD
Scopus Author ID 57428015200

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 5-21
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 5-21

Alexander I. Kozhanov, Doctor of Mathematics, Professor
SPIN 9132-3234 AuthorID: 2099
Scopus Author ID 55892833300

*Статья поступила в редакцию 13.03.2026;
одобрена после рецензирования 01.05.2026; принята к публикации 06.05.2026*

*The article was submitted 13.03.2026;
approved after reviewing 01.05.2026; accepted for publication 06.05.2026*